DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-797-804
УДК 517.977

ЕВКЛИДОВО РАССТОЯНИЕ ДО ЗАМКНУТОГО МНОЖЕСТВА КАК МИНИМАКСНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ

© А. А. Успенский, П. Д. Лебедев

ФГБУН «Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук»
620990, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: uspen@imm.uran.ru, pleb@yandex.ru

Аннотация. Предложен комбинированный (сочленяющий аналитические методы и вычислительные процедуры) подход к построению решений в одном классе краевых задач для уравнения гамильтонова типа. В рассматриваемом классе задач минимаксное (обобщенное) решение совпадает с евклидовым расстоянием до краевого множества. Изучены свойства этой функции в зависимости от геометрии краевого множества и дифференциальных свойств его границы. Разработаны методы выявления псевдовершин краевого множества и построения с их помощью сингулярных множеств решения. Методы опираются на свойства локальных диффеоморфизмов и используют частичные односторонние пределы. Эффективность развиваемых подходов исследования проиллюстрирована на примере решения плоской задачи управления по быстродействию для случая невыпуклого целевого множества с границей переменной гладкости.

Ключевые слова: евклидово расстояние; уравнение Гамильтона–Якоби; задача Дирихле; минимаксное решение; функция оптимального результата; быстродействие; сингулярное множество; локальный диффеоморфизм

Задача вычисления евклидова расстояния до замкнутого множества конечномерного пространства актуальна для различных разделов математики и приложений, что позволяет отнести ее к числу проблем, заслуживающих внимания. В данном случае эта проблема исследуется в контексте решения плоской краевой задачи Дирихле для уравнения Гамильтона–Якоби:

$$\min_{\nu:\, \|\nu\|\leqslant 1} \left(\nu_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \nu_2 \frac{\partial u}{\partial y}\right) + 1 = 0, \;\; u|_{\Gamma} = 0. \tag{1}$$

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект № 18-1-1-10).

Здесь $\|\nu\| = \sqrt{\nu_1^2+\nu_2^2}$ — норма вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{R}^2$. Краевое условие в (1) определено на границе $\Gamma = \partial M$ замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^2$. Кривая Γ не имеет точек самопересечения, ее дифференциальные свойства указаны ниже в теоремах.

Минимаксное решение [1] краевой задачи (1) (другими словами, обобщенное решение, определение которого опирается на конструкции теории позиционных дифференциальных игр [2]) имеет вид [3]:

$$u(x,y) = \rho\big((x,y), M\big), \tag{2}$$

где $\rho(\mathbf{x}, M) = \inf\limits_{\mathbf{m}\in M} \|\mathbf{m}-\mathbf{x}\|$ — евклидово расстояние от $\mathbf{x} = (x,y)$ до множества M. Отметим, что $u(x,y) = \rho\big((x,y), M\big)$ является функцией оптимального результата в задаче управления по быстродействию [1] с динамикой

$$\begin{cases} \dot{x} = \nu_1, \\ \dot{y} = \nu_2, \end{cases} \tag{3}$$

где управление $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ удовлетворяет ограничению $\|\nu\| \leqslant 1$, M — цель.

Динамическая система (3) относительно проста и известен класс разрешающих функций (2). Однако это не отменяет ряд сложностей при формировании оптимальной стратегии управления. Чтобы сформировать управляющие воздействия, надо научиться конструировать функцию оптимального результата — аналитическими, численными или комбинированными методами. Здесь следует подчеркнуть, что евклидово расстояние $u(x,y) = \rho\big((x,y), M\big)$ является супердифференцируемой функцией на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus M$ [4]. Негладкость функции затрудняет ее построение как в аналитическом виде, так и в аппроксимационных формах. Невыпуклость краевого множества влечет наличие у нее сингулярного множества, которое относится к множествам симметрии [5]. В общем случае сингулярное множество состоит из нуль- и одномерных многообразий. Их конструирование в аналитическом виде или же с помощью численных процедур облегчает построение решение краевой задачи в целом. При этом существенная роль отводится псевдовершинам — особым точкам границы краевого множества, которые «отвечают» за зарождение одномерных многообразий, ветвей множества симметрии.

Пусть $\gamma\colon T \to \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение числового интервала $T = (\hat{t}, \check{t})$, $-\infty \leqslant \hat{t} < \check{t} \leqslant +\infty$ на плоскость. Вектор-функция $\gamma(t) = \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)$ является по крайней мере один раз дифференцируемой функцией всюду на T за исключением, быть может, конечной совокупности точек $T^0 \subset T$. Образ $\Gamma = \gamma(t)$ этого отображения представляет собою плоскую кривую. Полагаем, что Γ является регулярной в области дифференцируемости, то есть $\gamma'(t) \neq (0,0)$ для всех $t \in T^0 \subset T$, и не имеет точек самопересечения. В рассмотрение также входят контуры — кривые, заданные на конечных интервалах $T = (\hat{t}, \check{t})$, $-\infty < \hat{t} < \check{t} < +\infty$, допускающие доопределение в концевых точках $t = \hat{t}$ и $t = \check{t}$) так, что $\gamma(\hat{t}) = \gamma(\check{t})$.

О п р е д е л е н и е 1. [6] Псевдовершиной кривой Γ называется точка

$$(x_0, y_0) \triangleq \lim_{t_1 \to t_0 - 0} (\overline{x}_*, \overline{y}_*),$$

где $(\overline{x}_*, \overline{y}_*) = \big(\overline{x}_*(t_1), \overline{y}_*(t_1)\big) \triangleq \big(x_*(t_1, t_2(t_1)), y_*(t_1, t_2(t_1))\big)$ — однопараметрическое подмножество решений $(x_*, y_*) = \big(x_*(t_1, t_2),\ \ y_*(t_1, t_2)\big)$ системы уравнений

$$\begin{cases} \big(x - \gamma_1(t_1)\big)\gamma_2'(t_1) = \big(y - \gamma_2(t_1)\big)\gamma_1'(t_1), \\ \big(x - \gamma_1(t_2)\big)\gamma_2'(t_2) = \big(y - \gamma_2(t_2)\big)\gamma_1'(t_2), \end{cases} \tag{4}$$

определяемое непрерывным слева в точке $t_1 = t_0$ локальным диффеоморфизмом $t_2 = t_2(t_1)$ левой полуокрестности точки $t_1 = t_0$ на ее правую полуокрестность, который задается уравнением

$$G(t_1, t_2) = 0. \tag{5}$$

Здесь

1) (x_*, y_*) — точка пересечения касательных к кривой Γ в точках $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_2)$,

2) $G(t_1, t_2) = \rho^2\big(\gamma(t_1), (x_*, y_*)\big) - \rho^2\big(\gamma(t_2), (x_*, y_*)\big)$.

Полагаем, что локальный диффеоморфизм $t_2 = t_2(t_1)$, определенный уравнением (5), удовлетворяет условиям:

(A1) $t_2\big((t_0 - \delta_1, t_0)\big) = (t_0, t_0 + \delta_2)$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$,

(A2) $\lim\limits_{t_1 \to t_0 - 0} t_2(t_1) = t_0$,

(A3) $\lim\limits_{t_1 \to t_0 - 0} \frac{dt_2}{dt_1} = c, c \in [-\infty, 0]$.

Условия (A1), (A2) обеспечивают существование обратного локального диффеоморфизма $t_2 = t_2(t_1)$, определенного справа от $t_2 = t_0$, и непрерывную склейку диффеоморфизмов в общей предельной точке. Параметр c в условии A3 является числовым маркером псевдовершины, фиксирующим состояние кривой с точки зрения дифференцируемости. Маркер $c = -1$ в случае дважды дифференцируемости кривой в псевдовершине. Если кривая гладкая, при этом в псевдовершине односторонние кривизны конечны и не равны друг другу, то либо $c = 0$, либо $c = -\infty$. Наконец, если рвутся производные первого порядка, то маркер равен отношению дифференциалов дуг кривой, стянутых в точку, при этом $c \neq -1$ (см. [7, 8]).

Приведем теоремы о необходимых условиях существования псевдовершин, применяемые для их отыскания при построении сингулярного множества решения задачи (1). Разграничим точки по их порядку гладкости. Обозначим $T^k \triangleq \{\bar{t}\} \subset T$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ совокупность значений аргумента $\bar{t} \in T$ точек $\gamma(\bar{t}) \in \Gamma$, в которых координатные функции имеют непрерывные производные до k-го порядка включительно, при этом существуют конечные не равные друг другу односторонние производные $(k+1)$-го порядка.

Теорема 1. [9] *Если $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ — псевдовершина трижды дифференцируемой кривой $\Gamma = \gamma(t)$, ограничивающей краевое множество M в задаче Дирихле* (1), *при этом $t_0 \in T^3$ и имеет место условие* (B1), *то с необходимостью в указанной точке выполняется хотя бы одно из равенств:*

$$\gamma_2' \left(\det(\gamma', \gamma''')\|\gamma'\|^2 - 3\det(\gamma', \gamma'') \cdot \langle \gamma', \gamma'' \rangle\right) = 0, \tag{6}$$

$$\gamma_1' \left(\det(\gamma', \gamma''')\|\gamma'\|^2 - 3\det(\gamma', \gamma'') \cdot \langle \gamma', \gamma'' \rangle\right) = 0. \tag{7}$$

Здесь условие

(B1) $\det\big(\gamma'(t_0),\gamma''(t_0)\big)\neq 0$,

где $\det(a,b)$ обозначает определитель второго порядка, построенный на векторах $a=(a_1,a_2)$, $b=(b_1,b_2)$, записанных по строкам, $\langle a,b\rangle = a_1b_1+a_2b_2$. Условие (B1) означает отличие от нуля кривизны кривой Γ в указанной точке, что гарантирует существование решений системы (1) в определении псевдовершины.

Теорема 2. [10] *Если $\gamma(t_0)=(x_0,y_0)$ — псевдовершина плоской регулярной кривой $\Gamma=\gamma(t)$, ограничивающей краевое множество M в задаче Дирихле* (1)*, при этом $t_0\in T^1$ и имеет место условие (B2), то псевдовершина Γ, определяемая локальным диффеоморфизмом $t_2=t_2(t_1)$ из* (5)*, удовлетворяет одному из условий:*

$$\gamma_1'(t_0)\neq 0, \gamma_2'(t_0)=0, \tag{8}$$

$$\gamma_1'(t_0)=0, \gamma_2'(t_0)\neq 0, \tag{9}$$

$$\lim_{t_1\to t_0-0}\frac{1}{t_1-t_0}\left(\frac{\gamma_2(t_2)-\gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2)-\gamma_1(t_1)}-\frac{-\gamma_1'(t_1)\gamma_1'(t_2)+\gamma_2'(t_1)\gamma_2'(t_2)+s(t_1)s(t_2)}{\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2)+\gamma_2'(t_2)\gamma_1'(t_1)}\right)=0,$$
$$\textit{когда } t_2=t_2(t_1), \gamma_1'(t_0)\neq 0, \gamma_2'(t_0)\neq 0, c=0, \tag{10}$$

$$\lim_{t_2\to t_0+0}\frac{1}{t_2-t_0}\left(\frac{\gamma_2(t_2)-\gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2)-\gamma_1(t_1)}-\frac{-\gamma_1'(t_1)\gamma_1'(t_2)+\gamma_2'(t_1)\gamma_2'(t_2)+s(t_1)s(t_2)}{\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2)+\gamma_2'(t_2)\gamma_1'(t_1)}\right)=0,$$
$$\textit{когда } t_1=t_1(t_2), \gamma_1'(t_0)\neq 0, \gamma_2'(t_0)\neq 0, c=-\infty. \tag{11}$$

Здесь условие

(B2) Определители $\det\big(\gamma'(t_0),\gamma''_-(t_0)\big)$ и $\det\big(\gamma'(t_0),\gamma''_+(t_0)\big)$ конечны, имеет один и тот же знак (в нестрогом смысле) $\det\big(\gamma'(t_0),\gamma''_-(t_0)\big)\neq\det\big(\gamma'(t_0),\gamma''_+(t_0)\big)$.

Нижние индексы $-$ и $+$ обозначают односторонние производные (левые и правые соответственно) указанного порядка скалярных и векторных функций.

Не трудно показать [11], что если $\gamma(t_0)=(x_0,y_0)$ — псевдовершина плоской регулярной кривой $\Gamma=\gamma(t)$, ограничивающей краевое множество M в задаче (1), при этом $t_0\in T^0$, то псевдовершина совпадает с крайней точкой сингулярной кривой.

Авторами разработан теоретический аппарат выявления псевдовершин на совокупностях T^0, T^1, T^3 и , как следствие, на совокупностях T^k при $k>3$. Получены соотношения, позволяющие находить псевдовершины границы краевого множества в точках трех типов — 1) в точках излома границы; 2) в точках минимальной гладкости, в которых существуют не совпадающие друг с другом односторонние кривизны, но притом не определена классическая кривизна; 3) в точках стационарности кривизны, то есть в точках, в которых существуют производные третьего и более высокого порядка. Недоисследованной остается проблема выявления псевдовершин на совокупности T^2, то есть в точках, в которых существует классическая кривизна, но при этом «рвутся» производные третьего порядка. На базе этих конструкций предложен комбинированный подход построения функции (2), опирающийся на аналитический поиск псевдовершин с помощью приведенных выше соотношений (6)–(11), и численные алгоритмы формирования ветвей сингулярного множества, основанные на решении системы уравнений, сопряженной к (4) (см. технологию, например, [8]).

К сферам приложения созданных процедур построения евклидова расстояния до замкнутого множества и его сингулярных кривых относятся, например, сглаживание негладкой границы множества разрешимости дифференциальной игры [12], вычисление меры невыпуклости плоского замкнутого множества [13].

П р и м е р 1. Проиллюстрируем эффективность разрабатываемого аппарата исследования негладких динамических задач на примере задачи управления по быстродействию с динамикой (3), когда целевое множество M ограничено кривой Γ :

$$\gamma_1(t) = r(t)\cos t,\ \ \gamma_2(t) = r(t)\sin t,\ \ t \in [0, 2\pi], \tag{12}$$

где

$$r(t) = \begin{cases} 2 - 0.75\sin^2 t - 0.5\sin(t/2),\ \ t \in [0, \pi], \\ 1.5 - 0.75\sin^2 t,\ \ t \in (\pi, 1.5\pi], \\ 2 - 1.25\sin^2 t,\ \ t \in (1.5\pi, \pi]. \end{cases}$$

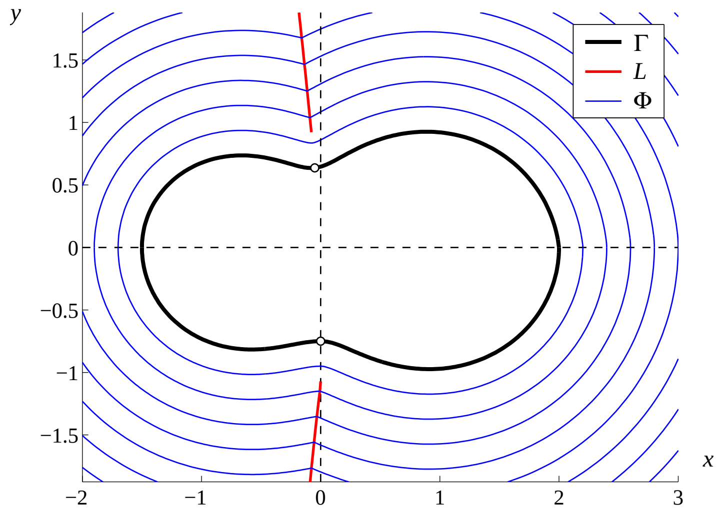

Рис. 1. Сингулярное множество и карта линий уровня функции $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$

У кривой (12) две псевдовершины различного типа. В одной из них $A \approx (-0.0499, 0.6370)$ кривизна достигает локального максимума, а в другой $B = (0, -0.75)$ имеет место разрыв кривизны. Линии уровня функции оптимального результата Φ, сингулярное множество L и граница Γ целевого множества показаны на рис. 1. Псевдовершины отмечены на нем в виде маркеров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва; Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003. 336 с.

2. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

3. *Лебедев П.Д., Успенский А.А., Ушаков В.Н.* Построение минимаксного решения уравнения типа эйконала // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2008. Т. 14. № 2. С. 182-191.

4. *Демьянов В.Ф., Васильев Л.В.* Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.

5. *Брус Дж., Джиблин П.* Кривые и особенности. М.: Мир, 1988. 262 с.

6. *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Условия трансверсальности ветвей решения нелинейного уравнения в задаче быстродействия с круговой индикатрисой // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2008. Т. 14. № 4. С. 82-100.

7. *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* О множестве предельных значений локальных диффеоморфизмов при эволюции волновых фронтов // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 171-185.

8. *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Построение сингулярных кривых для обобщенных решений уравнений типа эйконала в условиях разрыва кривизны границы краевого множества // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2016. Т. 22. № 1. С. 282-293.

9. *Успенский А.А.* Необходимые условия существования псевдовершин краевого множества в задаче Дирихле для уравнения эйконала // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2015. Т. 21. № 1. С. 250-263.

10. *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Выявление сингулярности обобщенного решения задачи Дирихле для уравнений типа эйконала в условиях минимальной гладкости границы краевого множества // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. Ижевск, 2018. Т. 28. Вып. 1. С. 59-73.

11. *Успенский А.А.* Формулы исчисления негладких особенностей функции оптимального результата в задаче быстродействия // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2014. Т. 20. № 3. С. 276-290.

12. *Ушаков В.Н., Успенский А.А., Малев А.Г.* Оценка дефекта стабильности множества позиционного поглощения, подвергнутого дискриминантным преобразованиям // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2011. Т. 17. № 2. С. 209-224.

13. *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Процедуры вычисления меры невыпуклости плоского множества // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49. № 3. С. 431-440.

Поступила в редакцию 13 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 21 мая 2018 г.
Принята в печать 26 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Успенский Александр Александрович, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, зав. сектором, e-mail: uspen@imm.uran.ru

Лебедев Павел Дмитриевич, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, e-mail: pleb@yandex.ru

Для цитирования: *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Евклидово расстояние до замкнутого множества как минимаксное решение задачи Дирихле для уравнения Гамильтона–Якоби // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 797–804. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-797-804

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-797–804

EUCLIDEAN DISTANCE TO A CLOSED SET AS A MINIMAX SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE HAMILTON–JACOBI EQUATION

A. A. Uspenskii, P. D. Lebedev

N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620990, Russian Federation
E-mail: uspen@imm.uran.ru, pleb@yandex.ru

Abstract. A combined (jointing analytical methods and computational procedures) approach to the construction of solutions in a class of boundary-value problems for a Hamiltonian-type equation is proposed. In the class of problems under consideration, the minimax (generalized) solution coincides with the Euclidean distance to the boundary set. The properties of this function are studied depending on the geometry of the boundary set and the differential properties of its boundary. Methods are developed for detecting pseudo-vertices of a boundary set and for constructing singular solution sets with their help. The methods are based on the properties of local diffeomorphisms and use partial one-sided limits. The effectiveness of the research approaches developed is illustrated by the example of solving a planar time-control problem for the case of a nonconvex target set with boundary of variable smoothness.

Keywords: Euclidean distance; Hamilton–Jacobi equation; Dirichlet problem; minimax solution; optimal result function; velocity; singular set; local diffeomorphism

REFERENCES

1. Subbotin A.I. *Generalized Solutions of First-Order PDEs. The Dynamical Optimization Perspective.* Boston, Birkhäuser, 1995.

2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnyye differentsial'nyye igry* [Positional Differential Games]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p. (In Russian).

3. Lebedev P.D., Uspenskii A.A., Ushakov V.N.Postroyeniye minimaksnogo resheniya uravneniya tipa eykonala [Construction of a minimax solution for an eikonal-type equation]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2008, vol. 14, no. 2, pp. 182-191. (In Russian).

4. Dem'yanov V.F., Vasil'yev L.V. *Nondifferentiable Optimization.* N.Y., Springer-Verlag, 1985.

5. Bruce J.W., Giblin P.J. *Curves and Singularities.* Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1984.

6. Uspenskii A.A., Lebedev P.D. Usloviya transversal'nosti vetvey resheniya nelineynogo uravneniya v zadache bystrodeystviya s krugovoy indikatrisoy [Transversality conditions for solution branches of a nonlinear equation in a time-optimal problem with circular indicatrix]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2008, vol. 14, no. 4, pp. 82-100. (In Russian).

7. Uspenskii A.A., Lebedev P.D.O mnozhestve predel'nykh znacheniy lokal'nykh diffeomorfizmov pri evolyutsii volnovykh frontov [On the set of limit values of local diffeomorphisms in wavefront

The work was supported by the basic research program of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (project № 18-1-1-10).

evolution]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 16, no. 1, pp. 171-185. (In Russian).

8. Uspenskii A.A., Lebedev P.D. Postroyeniye singulyarnykh krivykh dlya obobshchennykh resheniy uravneniy tipa eykonala v usloviyakh razryva krivizny granitsy krayevogo mnozhestva [The construction of singular curves for generalized solutions of eikonal-type equations with a curvature break in the boundary of the boundary set]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2016, vol. 22, no. 1, pp. 282-293. (In Russian).

9. Uspenskii A.A. Neobkhodimyye usloviya sushchestvovaniya psevdovershin krayevogo mnozhestva v zadache Dirikhle dlya uravneniya eykonala [Necessary conditions for the existence of pseudovertices of the boundary set in the Dirichlet problem for the eikonal equation]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 21, no. 1, pp. 250-263. (In Russian).

10. Uspenskii A.A., Lebedev P.D. Vyyavleniye singulyarnosti obobshchennogo resheniya zadachi Dirikhle dlya uravneniy tipa eykonala v usloviyakh minimal'noy gladkosti granitsy krayevogo mnozhestva [Identification of the singularity of the generalized solution of the Dirichlet problem for an eikonal type equation under the conditions of minimal smoothness of a boundary set]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2018, vol. 28, no. 1, pp. 59-73. (In Russian).

11. Uspenskii A.A. Formuly ischisleniya negladkikh osobennostey funktsii optimal'nogo rezul'tata v zadache bystrodeystviya [Calculation formulas for nonsmooth singularities of the optimal result function in a time-optimal problem]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2014, vol. 20, no. 3, pp. 276-290. (In Russian).

12. Ushakov V.N., Uspenskii A.A., Malev A.G. Otsenka defekta stabil'nosti mnozhestva pozitsionnogo pogloshcheniya, podvergnutogo diskriminantnym preobrazovaniyam [An estimate of the stability defect for a positional absorption set subjected to discriminant transformations]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2011, vol. 17, no. 2, pp. 209-224. (In Russian).

13. Uspenskii A.A., Lebedev P.D. Procedures for Calculating the Nonconvexity Measures of a Plane Set. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2009, vol. 49, no. 3, pp. 418-427.

Received 13 April 2018
Reviewed 21 May 2018
Accepted for press 26 June 2018
There is no conflict of interests.

Uspenskii Alexandr Alexandrovich, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Head of a Sector, e-mail: uspen@imm.uran.ru

Lebedev Pavel Dmitrievich, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Scientist, e-mail: pleb@yandex.ru

For citation: Uspenskii A.A., Lebedev P.D. Evklidovo rasstoyanie do zamknutogo mnozhestva kak minimaksnoe reshenie zadachi Dirihle dlya uravneniya Gamil'tona–Yakobi [Euclidean distance to a closed set as a minimax solution of the Dirichlet problem for the Hamilton–Jacobi equation]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 797–804. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-797-804 (In Russian, Abstr. in Engl.).